НРМОБУ «Салымская СОШ №1

Метод оценки при решении задач с параметром при подготовке к ЕГЭ.

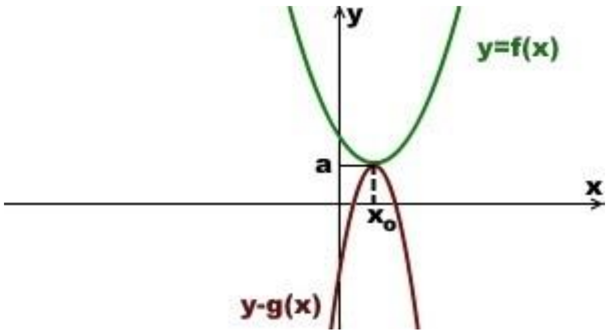
Николаева И.Н.

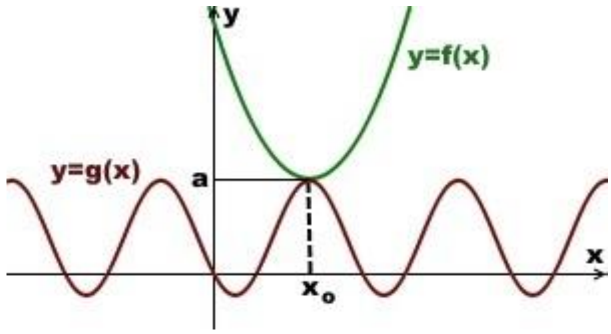
п. Салым, 2019г.

Метод оценок или метод мажорант относится к нестандартным методам решения уравнений и неравенств. Он базируется на свойстве ограниченности функций и применяется, когда в левой и правой частях уравнения или неравенства стоят функции разных типов. В ЕГЭ по математике встречаются задачи с параметром, где требуется оценить функции. Важно научить методу оценок при подготовке к экзамену. Применение метода оценок будет успешным, если учащиеся умеют находить экстремумы элементарных функций, область значений, исследовать функцию с помощью производной.

Метод оценок применяется для уравнений и неравенств, где функции, стоящие в левой и правой части, могут быть равны друг другу только в определенной точке, причем одна из них принимает в этой точке наименьшее значение, а другая-наибольшее.

Вот это как выглядит:





Рассмотрим простой пример 1: $\boldsymbol{2^{|x|} = cos(x^2)}$.

Оценим обе части уравнения. При всех значениях x верны неравенства

$$2^{|x|} \geq 1 \text{ и } cos(x^2) \leq 1.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ \cos^2 x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \cos^2 x = 1 \end{cases}.$$

При x = 0 второе уравнение обращается в тождество, значит x = 0 корень уравнения.

Если максимальное значение функции, стоящей в одной части уравнения, равно минимальному значению функции, стоящему в другой части уравнения, но эти значения достигаются при разных x_0, то уравнение не имеет корней:

Рассмотрим простой пример 2: $\mathbf{2^{|x|} = \sin(x^2)}$

Решение. Оценим обе части уравнения. При всех значениях x верны неравенства:

$$2^{|x|} \geq 1 \text{ и } sin(x^2) \leq 1.$$

Следовательно, данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 2^{|x|} = 1, \\ sin(x^2) = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ sin(x^2) = 1. \end{cases}$$

Полученная система не имеет решений, так как x=0 не удовлетворяет второму уравнению. А значит уравнение корней не имеет.

Если учащиеся уверенно решают алгебраические, тригонометрические и показательные уравнения для первого знакомства с методом оценок отлично подходит такое уравнение без параметра:

$$2^{(\sqrt{3}-\cos 10\pi x)(\sqrt{3}+\cos 10\pi x)} = 8 + (20x + 3)^2.$$

Что делать с этим уравнением?

Упростим его. Сделаем преобразования, которые можно выполнить сразу.

$$2^{(\sqrt{3}-\cos 10\pi x)(\sqrt{3}+\cos 10\pi x)} = 8 + (20x + 3)^2;$$

$$2^{3-\cos^2 10\pi x} = 8 + (20x + 3)^2;$$

$$\frac{8}{2^{\cos^2 10\pi x}} = 8 + (20x + 3)^2;$$

В левой и правой части уравнения находятся функции разных типов. Это уравнение бесполезно возводить в квадрат или делать с ним арифметические действия. Бесполезно брать логарифм от обеих частей – от всего этого оно станет еще хуже.

В левой и правой части появились восьмерки. И это добрый знак! Это «подсказка» специально для нас.

Чтобы обучающиеся лучше запомнили суть метода рассказываю историю.

Глубоко-глубоко в море жила маленькая рыбка. А высоко-высоко в небе жила маленькая птичка. И однажды они полюбили друг друга! А встретиться они могли только в одной точке, на границе моря и неба, до которой рыбке надо подняться, а птичке-спуститься!

О чем эта история? О нашем уравнении, конечно! В левой и правой частях уравнения находятся функции разных типов. И при определенном значении x они оказались равны друг другу. Легко заметить, что значения выражения в правой части всегда больше либо равны 8 («птичка»), значения выражения в левой части –меньше либо равны 8 («рыбка). И возможно, есть такая точка, где у одной из этих функций будет минимум, а у другой-максимум, причем значение каждой из них станет равно восьми.

Приравниваем правую часть к восьми.

$$8 + (20x + 3)^2 = 8;$$

$$(20x + 3)^2 = 0;$$

$$x = -\frac{3}{20} = -0{,}15.$$

Подставив $x = -0{,}15$ в левую часть, получим, что и она равна восьми при этом значении x.

$$\cos^2 10\pi(-0{,}15) = \cos 10\pi(-0{,}15)\cdot \cos 10\pi(-0{,}15) = \cos(-1{,}5\pi)\cdot\cos(-1{,}5\pi) = \cos^2\frac{3\pi}{2} = 0.$$

$$2^{\cos^2 10\pi(-0{,}15)} = 2^0 = 1$$

$$\frac{8}{2^{\cos^2 10\pi(-0{,}15)}} = \frac{8}{1} = 8$$

Значит, $x = -0{,}15$ является единственным корнем данного уравнения.

Ответ: $x = -0{,}15$.

Рассмотрим решение задачи с параметром методом оценки.

__Задача 1.__ *Найдите все значения параметра, а при которых уравнение* $\sqrt{7\cos(6x+7)+32} = -a^2 + 10a - 20$ *имеет решение.*

Решение.

Оценим обе части уравнения.

Найдем множество значений левой части исходного уравнения:

$$\cos x \in [-1; 1]$$

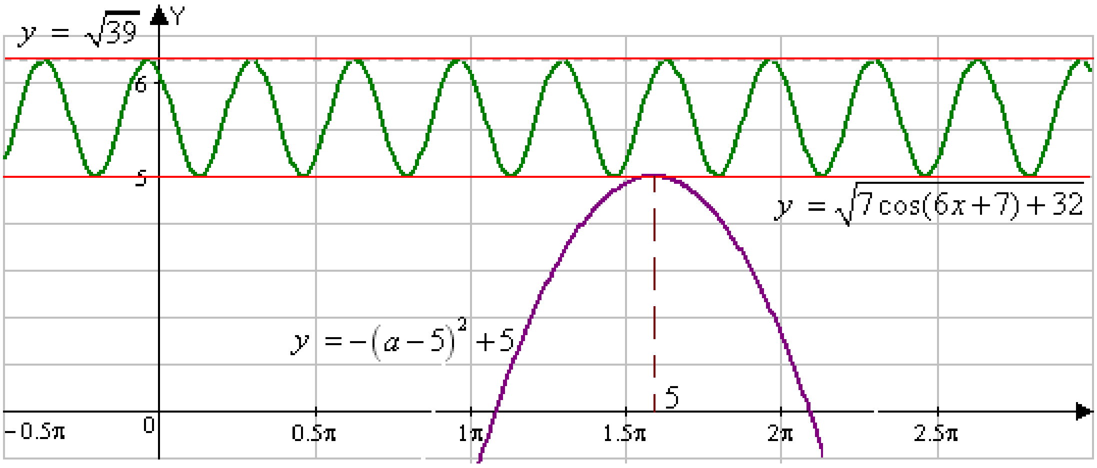
так как $7\cos(6x+7) \in [-7; 7]$, то $7\cos(6x+7) + 32 \in [25; 39]$, тогда $\sqrt{7\cos(6x+7)+32} \in [5; \sqrt{39}]$ из чего следует, что наименьшее значение $y = \sqrt{7\cos(6x+7)+32}$ равно 5.

В правой части данного уравнения – квадратичная функция, графиком которой является парабола, ветви направлены вниз.

Выделив, полный квадрат получаем: $-a^2 + 10a - 20 = -(a-5)^2 + 5$. Следовательно, наибольшее значение правой части равно 5 и достигается в вершине при $a - 5 = 0$, то есть при $a = 5$.

Итак, исходное уравнение имеет решение при $a = 5$.

Ответ: 5.



Задача 2. *Найти все значения параметра* $a \epsilon (5;16)$, *при каждом из которых существует хотя бы одно число* $\boldsymbol{x} \epsilon (1;2)$, *удовлетворяющее уравнению* $1 + cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|cos(\pi x) - sin(\pi x)|}$.

Решение.

Оценим обе части уравнения.

Учитывая, что $\cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) \geq 0$ и $|\cos(\pi x) - \sin(\pi x)| \geq 0$, для левой и правой частей уравнения имеем оценки: $1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) \geq 1$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos(\pi x) - \sin(\pi x)|} \geq 1$

Уравнение имеет решение, если обе его части равны 1. Следовательно, данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} 1 + cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = 1, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{|cos(\pi x) - sin(\pi x)|} = 1. \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0\,, \\ |cos(\pi x) - sin(\pi x)| = 0. \end{cases}$

Решим второе уравнение системы:

$|cos(\pi x) - sin(\pi x)| = 0,$

$cos(\pi x) - sin(\pi x) = 0,$

$cos(\pi x) = sin(\pi x) \,/\, \cos(\pi x),$

$\mathrm{tg}(\pi x) = 1,$

$\pi x = arctg1 + \pi k, k \in z,$

$\pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in z,$

$x = \frac{1}{4} + k, k \in z.$

$k = 1, x = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}, \quad \frac{5}{4} \in (1;2)$

$k = 2, x = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}, \quad \frac{9}{4}$ не принадлежит промежутку $(1;2)$

Промежутку (1;2) принадлежит только $\frac{5}{4}$.

Подставим найденное *x* в первое уравнение системы, найдем а:

$$\begin{cases} \cos\left(\dfrac{\alpha\frac{5}{4}}{2} + \dfrac{3\pi}{8}\right) = 0, \\ a \in (5; 16). \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos\left(\dfrac{5\alpha}{8} + \dfrac{3\pi}{8}\right) = 0, \\ a \in (5; 16). \end{cases}$$

$$\cos\left(\frac{5\alpha}{8} + \frac{3\pi}{8}\right) = 0$$

$\frac{5\alpha}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in z,$

$\frac{5\alpha}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in z,$

$$\frac{5\alpha}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8} + \pi n, n \in z,$$

$$\frac{5\alpha}{8} = \frac{\pi}{8} + \pi n, n \in z,$$

$$a = \frac{\pi}{5} + \frac{8}{5}\pi n, n \in z,$$

при n=1, $a = \frac{\pi}{5} + \frac{8}{5}\pi = \frac{9}{5}\pi,$

при n=2, $a = \frac{\pi}{5} + \frac{16}{5}\pi = \frac{17}{5}\pi,$

при n=3, $a = \frac{\pi}{5} + \frac{24}{5}\pi = 5\pi.$

Из найденного множества в промежутку (5;16) принадлежат $\frac{9}{5}\pi, \frac{17}{5}\pi, 5\pi.$

Ответ: $\frac{9}{5}\pi, \frac{17}{5}\pi, 5\pi.$